Liceul Teoretic "Grigore Moisil" Urziceni

Concursul de Matematică şi Informatică "Grigore Moisil"
Urziceni, 1-3 Februarie 2008, Ediţia a IV-a

Clasa a IX-a

Subiectul 1

Se consideră mulţimea $A=\left\{ n+\left[\dfrac{2008}{n}\right] \ \mid n\in \mathbb{N},\ 1\leq n\leq 2008\right\}$. Arătaţi că

$$\min A=89\quad \text{şi}\quad \max A=2009.$$

Cristinel Mortici

Subiectul 2

Fie $a,x_1>0$ şi fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$, $n\in \mathbb{N}^{\ast}$.
a) Demonstraţi că există $\lambda \in \mathbb{R}$ şi o progresie geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ de numere naturale astfel încât $\dfrac{x_n-\sqrt{a}}{x_n+\sqrt{a}}=\lambda^{b_n}$, oricare ar fi $n\in \mathbb{N}^{\ast}$.
b) Determinaţi termenul general al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

* * *

Subiectul 3

Fie $ABCD$ un patrulater, punctele $M,N\in (AB)$, $P,Q\in (CD)$, $R\in (AD)$, $S\in (BC)$ astfel încât $AM=MN=NB$, $CP=PQ=QD$, $AR=RD$, $BS=SC$ şi notăm $\{E\}=RS\cap MQ$, $\{F\}=RS\cap NP$.
Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a) $QE=EM$ şi $PF=FN$
b) $RE=EF=FS$.

Cristinel Mortici

Liceul Teoretic "Grigore Moisil" Urziceni

Concursul de Matematică şi Informatică "Grigore Moisil"
Urziceni, 1-3 Februarie 2008, Ediţia a IV-a

Clasa a X-a

Subiectul 1

Determinaţi mulţimea

$$A = \{(n,k) \in \mathbb{N} \mid \ \log_2(3^n - 2) \le k \le \log_2(3^n + 2)\}.$$

Cristinel Mortici

Subiectul 2

a) Fie $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \ge 2$ astfel încât $\sqrt[m]{5^n} + \sqrt[n]{5^m} = 10$. Arătaţi că $m = n$.
b) Fie $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \ge 2$ astfel încât $\sqrt[m]{2^n} + \sqrt[n]{16^m} = 8$. Arătaţi că $n = 2m$.

Cristinel Mortici

Subiectul 3

Se consideră un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de numere reale cu proprietatea că

$$|2^{a_n} - 2^{a_m}| \le \log_2\left(1 + \frac{m}{n}\right),$$

oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este constant.

Cristinel Mortici

Concursul de Matematică şi Informatică "Grigore Moisil"
Urziceni, 1-3 Februarie 2008, Ediţia a IV-a

Clasa a XI-a

Subiectul 1

Fie şirul $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$, cu $n \geq 1$.
a) Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton şi mărginit.
b) Aflaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât şirul $y_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \alpha\sqrt{n}$ să fie convergent.

* * *

Subiectul 2

Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ două matrice cu proprietatea că

$$\det(A+B)\det(A-B) = \det(A^2 - B^2).$$

Demonstraţi că $(AB - BA)^2 = 0_2$.

Cristinel Mortici

Subiectul 3

Fie $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}, (c_n)_{n\geq 1} \subset (0, \infty)$ cu proprietatea că

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n c_n = 1 \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} (a_n^3 + b_n^3 + c_n^3) = 3.$$

Demonstraţi că şirurile $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}, (c_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente cu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 1.$$

Cristinel Mortici

Liceul Teoretic "Grigore Moisil" Urziceni

Concursul de Matematică şi Informatică "Grigore Moisil"
Urziceni, 1-3 Februarie 2008, Ediţia a IV-a

Clasa a XII-a

Subiectul 1

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi $(G, \cdot)$ un grup astfel încât funcţiile $f, g : G \to G$ date prin

$$f(x) = x^m \quad , \quad g(x) = x^n$$

sunt morfisme ale grupului G. Demonstraţi că:
a) funcţia $u : G \to G$, definită prin $u(x) = x^{mn}$ este morfism al lui G;
b) funcţia $v : G \to G$, definită prin $v(x) = x^{(m-1)(n-1)}$ este morfism al lui G.

Cristinel Mortici

Subiectul 2

a) Se consideră o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admite primitive. Demonstraţi că funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = \{x\} f(x)$ admite primitive dacă şi numai dacă funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $h(x) = [x] f(x)$ admite primitive;
b) Calculaţi primitivele funcţiei $\varphi : [0, 2) \to \mathbb{R}$, definită prin $\varphi(x) = \{x\} \sin \pi x$.

* * *

Subiectul 3

Se consideră şirul $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)\,\mathrm{d}\,x$, cu $n \in \mathbb{N}$. Demonstraţi că:
a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;
b) $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)a_n = \ln 2$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty} (n+2)\left[(n+1)a_n - \ln 2\right] = -\dfrac{1}{2}$.

* * *